This report is awarded the Fist Class Prize of the competition.

幾隻襪子湊一雙？

2E 尹思琦

幾隻襪子湊一雙？普通人的答案都是兩隻，但是這個答案並不是永遠對的，答三隻才能萬保一失。作者由這條看似十分簡單的問題，慢慢向讀者揭露一個令人感嘆不己、以為很複雜卻充滿趣味的數學世界。

《幾隻襪子湊一雙？》是由著名的科普作家，伊斯威（Rob Eastaway）寫成的，由城邦文化出版。作者在書中，為讀者解答了十二道數學謎題。就如第四章「一封信封」，作者在開首以一個矩形帶出主題，說明了一張 A4 尺寸的紙條被折了之後，會出現龍曲線，便是《侏羅記公園》的插圖。在第六章「正面或反面？」，人們都以為投硬幣是絕對公平的，但是這篇章則是反對這個理論，並指出擲硬幣是存有偏差的，作者更由硬幣遊戲說到巴斯卡三角形，一個奇妙的三角形。在第十章「旅行到三角形的中心」，作者由他老師畫地圖的方法作為開首，一邊說出找三角形的內心的方法，一邊向讀者介紹直角三角形和黃金三角形。

閱讀這本書的時候，我都獲益良多，而令我學到最多的是第九章「大家來走捷徑」。作者透過一些謎題作為例子，從而告訴我們計算時，可以從不同的角度去思考，從而令計算得更有效率和快捷。作者提出的第一條謎題火車謎題，告訴我計算蒼蠅飛行距離，並不需要把每一小段的路程加起來，只要考慮時間乘以速率就可以。而第二題是螞蟻謎題，作者更教了我如何看清楚一題問題，要把不需要理會的部分忽略，把思緒精簡起來，就能更方便去整理出答案。在這

篇章裡，我學到了在解題時，千萬不要被問題困擾，也不要想到要計算複雜的步驟而放棄。我們不要理會無關痛癢的小節，反而要退後一小步，慢慢消化問題，便會發現訣竅。

第六章「正面或反面？」作者揭露了擲硬幣的一個鮮為人知的秘密，擲硬幣一直都是人們所認為是最公平的，但是作者卻推翻了這個的說法。我看到之後感到很詫異，所以為了找出真正的答案，便做了一個小實驗，我分別用了三個不同的方法去擲三十次硬幣，而三種方法用的都是同一個的一元香港硬幣。

首先，第一種的方法是用拇指彈起硬幣，讓它拋到凌空，然後接住。

接著，第二種的方法是用拇指和食指轉動硬幣，令它自轉，直至它停止下來，平面躺在桌子上。

最後，第三種的方法是在桌子上垂直滾動硬幣，直至它碰到硬物(我的筆袋)停下為止。

以下便是這三次實驗的結果。(正面是數字，反面是圖案)

	第一種的方法	第二種的方法	第三種的方法
正面（數字）	18	16	17
反面（圖案）	12	14	13

總結以上的結果，我們可以看到，無論是用哪種方法，擲出正面的次數都是多於反面的。雖然我們仔細地留意一下香港的一元硬幣，便會知道，反面凸起的圖案所佔的面積是比正面數字的少，那麼反面的重量當然也會比正面的輕。但是多出的重量也只不過是十分輕微的，怎會影響到這次實驗的結果呢？可是，這次實驗的結果卻告訴我們，只是十分輕微的偏差，都會令到實驗的結果受到影響。由此可見，作者的理論是對的，所以擲硬幣是真的存有偏差，而並不

是完全公平的。

那麼，哪一種擲硬幣的方法會比較公平呢？從上面的實驗數據顯示，看來方法二中正面跟反面的數目比較接近一點，可能是因為方法一中在空中的停留和方法三中的滾動都不能避免地心吸力對硬幣的影響，而垂直旋轉這個方法把地心吸力的影響減至最少。從今次實驗，我知道如何選擇擲硬幣的方法了。如果於我有益的話，我會選擇方法一；如果是為了公平的話，應該就要選擇方法二了。

第七章「迴文和其他漂亮的模式」的主題是迴文，作者說，迴文「是一種令人愉快卻無厘頭」的文字。在數學上，有不少數字的運算模式也可以造出一些類似迴文的效果。例如 11、111、1111…等，它們的平方均能造出有迴文格式的數字，例如$11 \times 11 = 121$，$1111 \times 1111 = 1234321$等。漫無目的的數字卻能造出對稱的數字，是不是有點無聊卻又令人愉快呢？

這段文中還有一個令我感到驚異的地方。讓我們先來玩一個遊戲吧。隨意想一個三位數，然後在計算機上連續按兩次，如 852→852852，再試試除以 7、11 或 13，你會驚訝地發現它們都能被 7、11 和 13 整除！

數字是隨意想的，怎會被固定的數字整除呢？我知道之後，仿佛發現驚天大秘密一樣，驚訝得目定口呆。當我把這個「秘密」告訴給同學時，他們都驚訝不已，這便證明了數學是可以帶給人趣味的。

其實我在後來花了一些時間去尋找這個現象的原因，例如為何這些數字可以讓 7 整除？首先，我們先以 XYZ 來代替 852 吧：

$$\begin{aligned} &\text{XYZXYZ} \\ &= 100000\text{X} + 10000\text{Y} + 1000\text{Z} + 100\text{X} + 10\text{Y} + \text{Z} \\ &= 100100\text{X} + 10010\text{Y} + 1001\text{Z} \\ &= 1001(100X + 10Y + Z) \end{aligned}$$

這裡我可以看到一個奇妙的數字「1001」，由於$11 \times 13 \times 7 = 1001$，所以 XYZXYZ 必定能夠被它們整除！

其實，我發現原來數字 11 比 7 和 13 更有趣。我們都知道，一個數字如果可以讓 11 整除，那它所有基數位數字之和，減去所有偶數位數字之和，必須等於 0 或者 11 的陪數。例如 136983，由於$(1 + 6 + 8) - (3 + 9 + 3) = 0$，所以它能夠讓 11 整除。一個任意三位數「ABC」，兩次後變成「ABCABC」，由於

$$(\text{A} + \text{C} + \text{B}) - (\text{B} + \text{A} + \text{C}) = 0$$

所以它必定可以給 11 整除。如此類推之下，5 位數、7 位數、9 位數等也可以給 11 整除，而 4 位數、6 位數等，則不一定可以的了。例如數字「ABCDABCD」

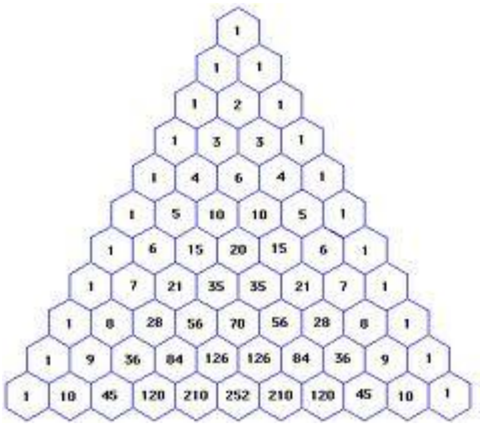
$$(\text{A} + \text{C} + \text{A} + \text{C}) - (\text{B} + \text{D} + \text{B} + \text{D}) \neq 0$$

所以它未必能夠被 11 整除。

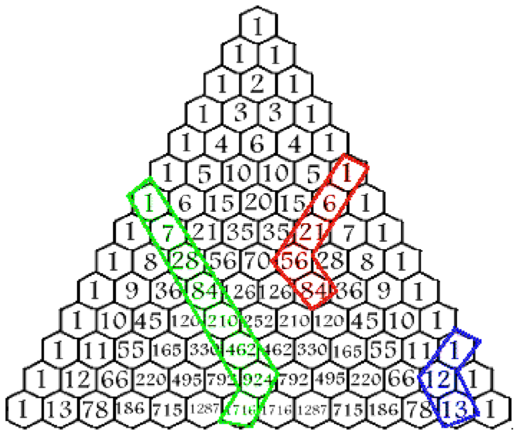
11 不僅是迴文數的最佳範例，更是在構成巴斯卡三角形之中擔當極之重要的角色。第一次見到這個三角形的篇章是第六章「正面或反面？」。在投擲兩個或以上的硬幣時會有不同的正反組合，作者告訴我們，每增加一枚硬幣，出現正或反的序列會有不同的可能性，他更顯示出數量不同的硬幣所出現的結果。如果我們把以上的結果寫成表，如下：

硬幣數量	組合
1	正 x1　反 x1
2	正正 x1　正反 x2　反反 x1
3	正正正 x1　正正反 x3　正反反 x3　反反反 x1
4	正正正正 x1　正正正反 x4　正正反反 x6　正反反反 x4　反反反反 x1

把組合的數量寫成三角形的模式，那麼巴斯卡三角形便出現了。



書中作者提到巴斯卡三角形跟 11 有密切的關係，每一行的數值其實都是 11 的次方數，例如第一行是 $11^0 = 1$，第二行是 $11^1 = 11$，第三行是 $11^2 = 121$，第四行是 $11^3 = 1331$ 等。其實除了這兩個之外，只要留心觀察，你就會發現到更多的特性。例如，不管是哪一行，只要是從 1 開始向下伸延，成為一條對角線，那麼對角線所經過的數字的和，剛巧是對角線的最後一個並處於下方的數。

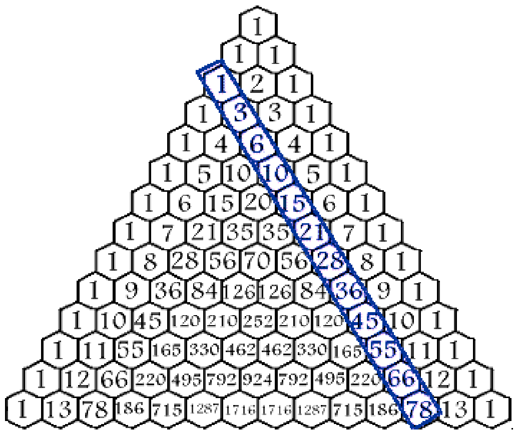


$1 + 6 + 21 + 56 = 84$

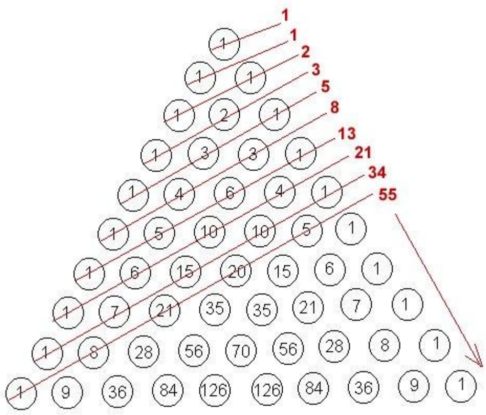
$1 + 7 + 28 + 84 + 210 + 462 + 624 = 1716$

$1 + 12 = 13$

此外，由左數起的第三行是三角形數數列:1、3、6、10、15、21、28、36、45、55、66、78 等。



我在這個陌生的三角形也發現了一組熟悉的數字，就是斐波那契數列。



還記得中一的時候，我的數學老師曾經介紹過這個有趣的數列。這個數列是關於一條問題:某人有一對成兔，牠們每月都會交配，而且一個月後會生出一公一母的小兔。小兔一個月後長

成成兔，然後馬上交配。一年後，總共有多少對成兔呢？原來每個月兔子的數量就構成了斐波那契數列。這當然不是兔子真實生殖的情況，但是在大自然中也有會這樣繁殖的生物，譬如喜歡在花圃逛來逛去的蜜蜂一樣。見到這條問題時，以為是斐波那契在家中，心感無聊而想出來的，原來這並不是虛構，而是真有其事，也是樣很有意義的東西。

在閱讀這本書的時候，我都感到十分驚喜，無論正在閱讀的那一章所涉及的內容是關於甚麼，我都覺得作者提及的數學謎題很新奇，很有趣，一直吸引我看完這本書為止。這本書不但能滿足我的好奇心，更能讓我找到數學不同的面貌。

參考網頁：

1. Pascal's Triangle, By Deb Russell, About.com Guide,
   http://math.about.com/od/algebralessons/ss/Pascal_3.htm
2. Playing with Numbers, Eric Pietrocupo,
   http://bgd.lariennalibrary.com/index.php?n=DesignArticle.Article-PlayingNumbers

（總字數：２７７０字）